Ueber diejenigen Flächen,

deren

Krümmungsmittelpunktsflächen confokale Flächen zweiten Grades sind.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

am 23. Juni 1880

VON

Ferdinand Rudio

aus Wiesbaden.

OPPONENTEN:

Carl Runge, Dr. phil.
Friedrich Schur, Dr. phil.
Rudolf Wilde, Rechtscandidat.

BERLIN.

DRUCK VON H. S. HERMANN.

Beuthstr. 8.

DEM ANDENKEN MEINER MUTTER

GEWIDMET.

Einleitung.

Von den Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confokale Flächen zweiten Grades sind, sind bis jetzt zwei äusserste Specialfälle bekannt. Einerseits hat Monge in seinem Werke „Application de l'analyse à la géométrie" (Ausgabe von Liouville pag. 246—286) diejenigen Flächen bestimmt, für welche die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche eine Kugel ist und dabei gefunden, dass die andere Schale nothwendig ein Kegel sein muss. Dieser Kegel kann ein ganz allgemeiner sein, es ist aber natürlich auch gestattet, ihn als einen speciellen Kreiskegel vorauszusetzen. Wir erkennen also, dass sich unter den Monge'schen Flächen solche befinden, deren Krümmungsmittelpunktsflächen als zu einem Systeme confokaler Flächen zweiten Grades (nämlich mit zusammenfallenden Brennpunkten der Hauptschnitte) gehörig angesehen werden können.

Andrerseits existiren bereits ausgedehnte Untersuchungen über diejenigen Flächen 4. Ordnung mit 4 Doppelpunkten, welche den unendlich fernen imaginären Kugelkreis als Doppelkegelschnitt enthalten und welche unter dem Namen der Dupin'schen Cycliden bekannt sind. (Eine vollständige Angabe der Literatur dieser Flächen findet man in Darboux's Werke „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques"). Die beiden Schalen der Centrenfläche der Dupin'schen Cyclide degeneriren in zwei Kegelschnitte, eine Ellipse und eine Hyperbel, und zwar sind dieselben die Fokalkegelschnitte eines Systems confokaler Flächen zweiten Grades. Die Dupin'sche Cyclide besitzt dabei die wichtige Eigenschaft, die einzige Fläche zu sein, für welche beide Schalen der Krümmungsmittelpunktsfläche in Curven degeneriren.

Die beiden genannten äussersten Specialfälle, die specielle Monge'sche Fläche und die Dupin'sche Cyclide, von welchen namentlich die letztere von grossem Interesse ist, haben nun das Gemeinschaftliche, dass ihre Krümmungsmittelpunktsflächen aufgefasst werden können als Grenzflächen in Systemen confokaler Flächen zweiten Grades. Es scheint daher wohl berechtigt, den allgemeinen Fall ins Auge zu fassen und alle diejenigen Flächen aufzusuchen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen sich zusammensetzen aus zwei ganz beliebigen confokalen Flächen zweiten Grades. Natürlich dürfen dieselben nicht von derselben Art sein, sondern müssen reelle Durchdringungen haben, weil ja sonst keine gemeinschaftlichen Tangenten beider Flächen möglich wären.

Ich will nicht unterlassen, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Kummer, für die gütige Anregung, die er mir zu dieser Arbeit, wie überhaupt bei meinen Studien, hat zu Theil werden lassen, meinen vorzüglichsten Dank auszusprechen.

---

§ 1.

Wenn man zwei Flächen beliebig annimmt und von denselben verlangt, dass sie die beiden Schalen der Centrenfläche einer noch zu suchenden Fläche darstellen sollen, so ist diese Forderung im Allgemeinen nicht zu erfüllen, sondern es müssen hierzu ganz bestimmte Bedingungen stattfinden.

Nun hat Monge als Criterium hierzu angegeben, dass, von jedem Punkte des Raumes aus gesehen, die Umrisse der beiden Schalen sich rechtwinklig schneiden müssten. Aber dieses Criterium ist insofern unrichtig, als es zu viel verlangt. Es würde nämlich nach Monge ein Zusammenhang der beiden Schalen der Centrenfläche längs einer Curve nur stattfinden können, wenn die ursprüngliche Fläche eine Linie sphärischer Krümmung besässe. Längs einer Doppelcurve der Centrenfläche müssten sich also die beiden Mäntel nothwendigerweise rechtwinklig schneiden. Herr Kummer war der erste, der an Hand eines von Herrn H. A. Schwarz ausgeführten Modells der Centrenfläche eines Ellipsoides diesen Irrthum entdeckte und das Monge'sche Criterium dahin zurückführte, dass sich die zu der Verbindungslinie zweier zugeordneter Punkte gehörigen Tangentialebenen der beiden Schalen der Centrenfläche rechtwinklig schneiden müssen. (Vergl. Monatsberichte der Berl. Akad. 1862).

Für den Fall zweier confokaler Flächen zweiten Grades ist nun bereits das Monge'sche Criterium erfüllt, denn zunächst schneiden sich zwei confokale Flächen zweiten Grades längs ihrer ganzen Durchdringungscurve rechtwinklig und zweitens werden dieselben von jedem Punkte des Raumes aus durch zwei coaxiale und confokale Kegel zweiten Grades projicirt. Es giebt also Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confokale Flächen zweiten Grades sind.

§ 2.

Um die gesuchten Flächen analytisch darzustellen, verfahren wir nach der von Herrn Kummer in seiner „Theorie der geradlinigen Strahlensysteme“ (Crelle Bd. 57) angegebenen Methode. Wir haben hiernach zuerst einen analytischen Ausdruck für das Strahlensystem aufzustellen, dessen Brennflächen die beiden confokalen Flächen zweiten Grades sind. Dieses Strahlensystem ist von der vierten Ordnung und der vierten Klasse und gehört nach den Ausführungen des § 1 zu den speciellen Strahlensystemen, welche als die Normalensysteme von Flächen angesehen werden können. Ein beliebiger Strahl eines Strahlensystems wird nun nach der genannten Methode dadurch analytisch fixirt, dass man seinen Durchstosspunkt x, y, z mit einer Ausgangsfläche und seine Richtungscosinusse ξ, η, ζ angiebt. Dabei werden nach dem Vorgange von Gauss die Coordinaten x, y, z der Ausgangsfläche als Funktionen zweier Variabeln u und v angesehen und dann ξ, η, ζ ebenfalls als Funktionen dieser Variabeln dargestellt.

Bezeichnet man dann mit x', y', z' einen beliebigen Punkt des betrachteten Strahles und mit ϱ seine Entfernung von dem Ausgangspunkte x, y, z, so ist

$$x' - x = \varrho\xi,\ y' - y = \varrho\eta,\ z' - z = \varrho\zeta.$$

Soll jetzt x', y', z' einer Fläche angehören, zu welcher der durch x, y, z, ξ, η, ζ bestimmte Strahl

normal ist, so muss die durch ξ, η, ζ bestimmte Richtung senkrecht zu der durch x', y', z' gehenden Tangentialebene sein, d. h. es muss die Relation stattfinden

$$\xi dx' + \eta dy' + \zeta dz' = o;$$

dx', dy', dz' bestimmen sich aus

$$x' - x = \varrho\xi,\ y' - y = \varrho\eta,\ z' - z = \varrho\zeta$$

nämlich

$$dx' = dx + \xi d\varrho + \varrho d\xi$$
$$dy' = dy + \eta d\varrho + \varrho d\eta$$
$$dz' = dz + \zeta d\varrho + \varrho d\zeta$$

Setzt man dies in

$$\xi dx' + \eta dy' + \zeta dz' = o$$

ein, so folgt

$$o = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\varrho + (\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta)\, \varrho$$

Da aber $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ und folglich

$$\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = o$$

ist, so erhalten wir als schliessliche Bedingung für ξ, η, ζ, die Differentialgleichung

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = -\, d\varrho$$

Denken wir uns nun x, y, z, ξ, η, ζ als Funktionen zweier Variabeln u und v, so geht diese Bedingungsgleichung über in

$$-\, d\varrho = \left(\xi \frac{dx}{du} + \eta \frac{dy}{du} + \zeta \frac{dz}{du}\right) du + \left(\xi \frac{dx}{dv} + \eta \frac{dy}{dv} + \zeta \frac{dz}{dv}\right) dv$$

Diese Differentialgleichung kann keineswegs von jedem Strahlensysteme erfüllt werden, sondern nur von einem solchen, welches die Bedingung erfüllt

$$\frac{d}{dv}\left(\xi \frac{dx}{du} + \eta \frac{dy}{du} + \zeta \frac{dz}{du}\right) = \frac{d}{du}\left(\xi \frac{dx}{dv} + \eta \frac{dy}{dv} + \zeta \frac{dz}{dv}\right)$$

Diese Integrabilitätsbedingung ist der analytische Ausdruck des bereits in geometrischer Gestalt angegebenen Criteriums.

Die Aufgabe ist nun die, eine Ausgangsfläche $x = f_1(u, v)$, $y = f_2(u, v)$, $z = f_3(u, v)$ derartig passend anzugeben, dass die Integration der obigen Diffenterialgleichung gelingt. Ist dies geschehen, und hat man das Integral $\varrho = F(u, v)$ gefunden, so sind die Gleichungen der gesuchten Fläche

$$x' = x + \varrho\xi,\ y' = y + \varrho\eta,\ z' = z + \varrho\zeta$$

Für das Strahlensystem, dessen Brennflächen zwei confokale Flächen zweiten Grades sind, empfiehlt es sich nun, als Ausgangsfläche die eine der beiden Flächen zweiten Grades selbst zu wählen und als Variabeln u und v die elliptischen Coordinaten anzunehmen. Dieselbe Substitution, mittelst deren es Jacobi gelang, die Differentialgleichung der geodätischen Linie des dreiachsigen Ellipsoides zu integriren, führt auch hier zum Ziele; durch die Einführung der elliptischen Coordinaten werden die Variabeln der vorliegenden Differentialgleichung getrennt. In der That stehen ja die geodätischen Linien der Flächen zweiten Grades mit den gesuchten Flächen im engsten Zusammenhange.

§ 3.

Seien nun die beiden confokalen Flächen zweiten Grades durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}=1$$
$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}=1$$

gegeben. Wir wollen die erste Fläche als die Fläche (λ), die zweite als die Fläche (μ) bezeichnen. Construiren wir in einem beliebigen Punkte x, y, z der Fläche (λ), welche wir als Ausgangsfläche wählen wollen, die zugehörige Tangentialebene, so schneidet dieselbe aus der Fläche (μ) einen Kegelschnitt, an welchen von dem Punkte x, y, z aus zwei Tangenten gezogen werden können. Diese beiden Tangenten sind die durch den Punkt x, y, z, der Fläche (λ) gehenden Strahlen des Strahlensystems. Fassen wir einen derselben ins Auge. Der betrachtete Strahl berührt die beiden Flächen (λ) und (μ); der Berührungspunkt mit der ersteren ist x, y, z, der mit der letzteren möge die Coordinaten x_1, y_1, z_1 haben. Diese beiden Berührungspunkte sind die Brennpunkte des betrachteten Strahles des Systems und sind in dem Sinne der oben citirten Abhandlung von Herrn Kummer (Monatsber. 1862) als conjungirte Punkte zu bezeichnen. Bedeutet r den Abstand dieser beiden Punkte, so können wir die Richtungscosinusse ξ, η, ζ des Strahles ausdrücken durch

$$x-x_1=r\xi,\quad y-y_1=r\eta,\quad z-z_1=r\zeta$$

Wir haben also zunächst die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des zu x, y, z conjugirten Punktes durch x, y, z auszudrücken.

Die angegebene Zuordnung der Punkte der beiden Flächen (λ) und (μ) ist keine eindeutige. Jedem Punkte der einen Fläche sind 2 Punkte der andern zugeordnet und umgekehrt, denn durch jeden Punkt sowohl der einen als der andern Fläche gehen zwei Strahlen des Strahlensystems. Wir werden daher x_1, y_1, z_1 als doppeldeutige Funktionen von x, y, z erhalten müssen.

Nun liegt der Punkt x_1, y_1, z_1, erstens auf der Fläche (μ), zweitens auf der in dem Punkte x, y, z an die Fläche (λ) construirten Tangentialebene und endlich auf der Polarebene des Punktes x, y, z, in Bezug auf die Fläche (μ). Wir erhalten also zur Bestimmung von x_1, y_1, z_1 die drei Gleichungen

$$\frac{x_1^2}{a^2-\mu}+\frac{y_1^2}{b^2-\mu}+\frac{z_1^2}{c^2-\mu}=1$$
$$\frac{xx_1}{a^2-\lambda}+\frac{yy_1}{b^2-\lambda}+\frac{zz_1}{c^2-\lambda}=1$$
$$\frac{xx_1}{a^2-\mu}+\frac{yy_1}{b^2-\mu}+\frac{zz_1}{c^2-\mu}=1$$

Um hieraus z. B. x_1 zu finden, bestimmen wir aus den beiden letzten Gleichungen y_1 und z_1 und erhalten

$$y_1=\frac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)}{(c^2-b^2)z}\left(1-\frac{(a^2-b^2)xx_1}{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}\right)$$
$$z_1=\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}{(b^2-c^2)y}\left(1-\frac{(a^2-c^2)xx_1}{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}\right)$$

Setzt man diese Werthe von y_1 und z_1 in die erste Gleichung ein, so erhält man eine quadratische Gleichung in x_1. Nach einigen Zwischenrechnungen, die wir hier übergehen, ergiebt sich x_1 ausgedrückt durch x, y, z; hieraus erhalten wir dann sofort den Werth von $x-x_1=r\xi$. In ganz derselben Weise bildet man y_1 und z_1, woraus dann unmittelbar $r\eta=y-y_1$ und $r\zeta=z-z_1$ als Funktionen von x, y, z sich ergeben.

Das schliessliche Resultat ist

$$r\xi = \frac{x\,(N^2 - N_1^2) - (b^2 - c^2)\,(a^2 - \lambda)\,(a^2 - \mu)\,yz\,\sqrt{N^2 - M^2}}{N^2}$$

$$r\eta = \frac{y\,(N^2 - N_2^2) - (c^2 - a^2)\,(b^2 - \lambda)\,(b^2 - \mu)\,xz\,\sqrt{N^2 - M^2}}{N^2}$$

$$r\zeta = \frac{z\,(N^2 - N_3^2) - (a^2 - b^2)\,(c^2 - \lambda)\,(c^2 - \mu)\,xy\,\sqrt{N^2 - M^2}}{N^2}$$

Hierbei ist zur Abkürzung gesetzt

$$N^2 = (a^2 - \lambda)^2\,(a^2 - \mu)\,(b^2 - c^2)^2\,y^2\,z^2 + (b^2 - \lambda)^2\,(b^2 - \mu)\,(c^2 - a^2)^2\,z^2\,x^2 + (c^2 - \lambda)^2\,(c^2 - \mu)\,(a^2 - b^2)^2\,x^2\,y^2$$

$$M^2 = (b^2 - \lambda)^2\,(b^2 - \mu)\,(c^2 - \lambda)^2\,(c^2 - \mu)\,x^2 + (c^2 - \lambda)^2\,(c^2 - \mu)\,(a^2 - \lambda)^2\,(a^2 - \mu)\,y^2 + (a^2 - \lambda)^2\,(a^2 - \mu)\,(b^2 - \lambda)^2\,(b^2 - \mu)\,z^2$$

$$N_1^2 = (a^2 - \lambda)\,(a^2 - \mu)\left((c^2 - \lambda)^2\,(c^2 - \mu)\,(a^2 - b^2)\,y^2 - (b^2 - \lambda)^2\,(b^2 - \mu)\,(a^2 - c^2)\,z^2\right)$$

$$N_2^2 = (b^2 - \lambda)\,(b^2 - \mu)\left((a^2 - \lambda)^2\,(a^2 - \mu)\,(b^2 - c^2)\,z^2 - (c^2 - \lambda)^2\,(c^2 - \mu)\,(b^2 - a^2)\,x^2\right)$$

$$N_3^2 = (c^2 - \lambda)\,(c^2 - \mu)\left((b^2 - \lambda)^2\,(b^2 - \mu)\,(c^2 - a^2)\,x^2 - (a^2 - \lambda)^2\,(a^2 - \mu)\,(c^2 - b^2)\,y^2\right)$$

Damit durch die angegebenen Werthe von $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ wirklich zwei durch den Punkt x, y, z hindurch gehende Strahlen definirt werden, haben wir noch den Vorzeichen der auftretenden Quadratwurzeln einige Beachtung zu schenken. Da die beiden durch x, y, z gehenden Strahlen in der Tangentialebene

$$\frac{xx_1}{a^2 - \lambda} + \frac{yy_1}{b^2 - \lambda} + \frac{zz_1}{c^2 - \lambda} = 1$$

liegen müssen, so hat man die Vorzeichen jener Quadratwurzeln so zu bestimmen, dass die Gleichung

$$\frac{x\xi}{a^2 - \lambda} + \frac{y\eta}{b^2 - \lambda} + \frac{z\zeta}{c^2 - \lambda} = 0,$$

welche ja ebenfalls die Gleichung der Tangentialebene darstellt, erfüllt wird. Man erkennt sofort, dass dieser Bedingung genügt wird, wenn die Quadratwurzel $\sqrt{N^2 - M^2}$ in den oben gegebenen drei Ausdrücken mit demselben Zeichen versehen wird.

Bedenkt man jetzt noch, dass r durch die Gleichung gegeben ist

$$r^2 = (r\xi)^2 + (r\eta)^2 + (r\zeta)^2,$$

so hat man durch diese 4 Gleichungen für $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ und r^2 das Strahlensystem 4. Ordnung und 4. Classe, dessen Brennflächen die beiden confokalen Flächen zweiten Grades sind, analytisch vollkommen ausgedrückt. Durch jeden Punkt x, y, z der Ausgangsfläche (λ) gehen zwei Strahlen, deren Richtungscosinusse sich aus den vier Gleichungen für $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ und r^2 ergeben. Dem einen Strahle entspricht in den drei Gleichungen für $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ das positive Zeichen der Quadratwurzel, dem andern das negative.

§ 4.

Wenn man die erhaltenen Ausdrücke von ξ, η, ζ in die Differentialgleichung

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz = -d\varrho$$

einsetzen wollte, so würde dieselbe eine so complicirte Gestalt annehmen, dass von einer Integration wohl kaum die Rede sein könnte. Die Integration gelingt aber von selbst, wie bereits oben be-

merkt wurde, durch Einführung von elliptischen Coordinaten, indem hierdurch die Variabeln in der transformirten Differentialgleichung

$$\left(\xi\frac{dx}{du}+\eta\frac{dy}{du}+\zeta\frac{dz}{du}\right)du+\xi\left(\frac{dx}{dv}+\eta\frac{dy}{dv}+\zeta\frac{dz}{dv}\right)dv=-d\varrho$$

getrennt werden. Die dabei anzustellende Rechnung ist sehr verwickelt und erfordert daher ein näheres Eingehen wenigstens auf die Hauptpunkte derselben. Das schliessliche Resultat aber gestaltet sich ausserordentlich einfach.

Die Einführung der elliptischen Coordinaten geschieht durch die bekannten Substitutionen

$$x^2=(a^2-\lambda)\frac{(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad y^2=(b^2-\lambda)\frac{(b^2-u)(b^2-v)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}$$

$$z^2=(c^2-\lambda)\frac{(c^2-u)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

Führt man diese Werthe in die Gleichungen für $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ ein, so ergiebt sich nach einigen einfachen Reductionen

$$r\xi=\sqrt{a^2-\lambda}\,\frac{\sqrt{(a^2-u)(a^2-v)}\,(P^2-P_1^2)-d(a^2-\mu)\sqrt{(b^2-u)(c^2-u)}\sqrt{(b^2-v)(c^2-v)}\sqrt{P^2+Q^2}}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\,P^2}$$

$$r\eta=\sqrt{b^2-\lambda}\,\frac{\sqrt{(b^2-u)(b^2-v)}\,(P^2-P_2^2)-d(b^2-\mu)\sqrt{(c^2-u)(a^2-u)}\sqrt{(c^2-v)(a^2-v)}\sqrt{P^2+Q^2}}{\sqrt{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}\,P^2}$$

$$r\zeta=\sqrt{c^2-\lambda}\,\frac{\sqrt{(c^2-u)(c^2-v)}\,(P^2-P_3^2)-d(c^2-\mu)\sqrt{(a^2-u)(b^2-u)}\sqrt{(a^2-v)(b^2-v)}\sqrt{P^2+Q^2}}{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\,P^2}$$

Dabei ist zur Abkürzung gesetzt

$$-d^2=(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$$

$$\begin{aligned}P^2=&(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(b^2-c^2)(b^2-u)(c^2-u)(b^2-v)(c^2-v)+\\&(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(c^2-a^2)(c^2-u)(a^2-u)(c^2-v)(a^2-v)+\\&(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(a^2-b^2)(a^2-u)(b^2-u)(a^2-v)(b^2-v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q^2=&(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(b^2-c^2)(a^2-u)(a^2-v)+\\&(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(c^2-a^2)(b^2-u)(b^2-v)+\\&(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(a^2-b^2)(c^2-u)(c^2-v)\end{aligned}$$

$$P_1^2=(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-\mu)\Big\{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(b^2-u)(b^2-v)-(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(c^2-u)(c^2-v)\Big\}$$

$$P_2^2=(b^2-c^2)(b^2-a^2)(b^2-\mu)\Big\{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(c^2-u)(c^2-v)-(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(a^2-u)(a^2-v)\Big\}$$

$$P_3^2=(c^2-a^2)(c^2-b^2)(c^2-\mu)\Big\{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(a^2-u)(a^2-v)-(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(b^2-u)(b^2-v)\Big\}$$

Man überzeugt sich nach der oben angebenen Methode leicht, dass die Gleichungen für $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ auch hinsichtlich der Vorzeichen der verschiedenen Quadratwurzeln richtig sind, wenn nur dieselbe Quadratwurzel in allen drei Ausdrücken dasselbe Zeichen erhält.

Die anscheinend ausserordentlich complicirten Formeln lassen sich sofort in eine übersichtlichere Gestalt bringen, wenn wir die in P_1^2, P_2^2, P_3^2 vorkommenden, in den geschlungenen Klammern stehenden Ausdrücke resp. bezeichnen mit Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, sodass wir also haben

$$P_1^2=(a^2-b^2)(a^2-c^2)(a^2-\mu)\,Q_1^2$$

$$P_2^2=(b^2-c^2)(b^2-a^2)(b^2-\mu)\,Q_2^2$$

$$P_3^2=(c^2-a^2)(c^2-b^2)(c^2-\mu)\,Q_3^2$$

Man findet dann mit leichter Mühe, dass P^2 und Q^2 sich darstellen in der Form

$$P^2 = a^2 (a^2 - u) (a^2 - v) Q_1^2 + b^2 (b^2 - u) (b^2 - v) Q_2^2 + c^2 (c^2 - u) (c^2 - v) Q_3^2$$
$$Q^2 = a^2 (a^2 - \lambda) (a^2 - \mu) Q_1^2 + b^2 (b^2 - \lambda) (b^2 - \mu) Q_2^2 + c^2 (c^2 - \lambda) (c^2 - \mu) Q_3^2$$

Unsre nächste Aufgabe ist nun, die Ausdrücke $P^2 + Q^2$, $P^2 - P_1^2$, $P^2 - P_2^2$, $P^2 - P_3^2$ auf ihre einfachste Gestalt zu reduciren. Wir werden später auch für P^2 selbst einen sehr einfachen Ausdruck finden, indessen bietet es, wenigstens bei dem hier befolgten Gange der Rechnung, keinen Vortheil, denselben schon jetzt einzuführen. P^2 kommt ja nur im Nenner vor und zwar ohne weitere Verbindung, sodass es sofort einleuchtet, dass auch $r^2 = (r\xi)^2 + (r\eta)^2 + (r\zeta)^2$ den Faktor $\frac{1}{P^2}$ enthalten wird. In den Ausdrücken für ξ, η, ζ, deren Bildung ja unser nächstes Ziel ist, wird also P^2 nicht mehr vorkommen. Wohl aber ist auf P^2 Rücksicht zu nehmen, wenn es sich darum handelt, dem Ausdrucke für r die einfachste Gestalt zu geben.

Schreiten wir jetzt zur Bildung von $P^2 + Q^2$.

Es ist leicht zu erkennen, dass die Ausdrücke für Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2 resp. die Faktoren enthalten $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$. Bilden wir nun die Summe $P^2 + Q^2$, und ziehen aus Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2 resp. die Faktoren $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$ heraus, so können wir $P^2 + Q^2$ in abgekürzter Form schreiben

$$P^2 + Q^2 = a^2 (b^2 - c^2) S_1^2 R_1^2 + b^2 (c^2 - a^2) S_2^2 R_2^2 + c^2 (a^2 - b^2) S_3^2 R_3^2$$

wenn wir R_1^2, R_2^2, R_3^2 resp. definiren durch $Q_1^2 = (b^2 - c^2) R_1^2$, $Q_2^2 = (c^2 - a^2) R_2^2$, $Q_3^2 = (a^2 - b^2) R_3^2$ und wenn S_1^2, S_2^2, S_3^2 resp. die Faktoren von $a^2 Q_1^2$, $b^2 Q_2^2$, $c^2 Q_3^2$ in $P^2 + Q^2$ darstellen. Multiplicirt man nun diese Produkte $S_1^2 R_1^2$, $S_2^2 R_2^2$, $S_3^2 R_3^2$ aus und vereinigt in den drei so erhaltenen Summen die entsprechenden Terme, so ergiebt sich, dass $P^2 + Q^2$ den Faktor $-d^2 = (a^2 - b^2) (b^2 - c^2) (c^2 - a^2)$ enthält, sofern man nämlich die Gleichung berücksichtigt

$$a^4 (b^2 - c^2) + b^4 (c^2 - a^2) + c^4 (a^2 - b^2) = d^2$$

Ist in $P^2 + Q^2$ der Faktor d^2 abgesondert, so erkennt man auf den ersten Blick, dass $P^2 + Q^2$ sich in der folgenden einfachen Form darstellt

$$P^2 + Q^2 = d^2 (\lambda - u) (\mu - u) (\lambda - v) (\mu - v)$$

In ähnlicher Weise gelingt es, die Ausdrücke $P^2 - P_1^2$, $P^2 - P_2^2$, $P^2 - P_3^2$ zu reduciren. Aus der oben angegebenen Gestalt von P^2 überzeugt man sich nämlich leicht, dass schon P^2 selbst den Faktor d^2 enthält. Dasselbe gilt aber auch von P_1^2, P_2^2, P_3^2, weil ja Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2 resp. die Faktoren $b^2 - c^2$, $c^2 - a^2$, $a^2 - b^2$ enthalten. Ziehen wir nun aus $P^2 - P_1^2$, $P^2 - P_2^2$, $P^2 - P_3^2$ den Faktor d^2 heraus, was nach dem Vorhergehenden keine Schwierigkeiten mehr bietet, so erkennt man leicht, dass aus allen drei Ausdrücken auch der Faktor $(\mu - u) (\mu - v)$ heraustritt. Man erhält dann ohne weitere Rechnung die Ausdrücke

$$P^2 - P_1^2 = d^2 (\mu - u) (\mu - v) \left\{(\lambda - u) (\lambda - v) - (b^2 - \lambda) (c^2 - \lambda)\right\}$$
$$P^2 - P_2^2 = d^2 (\mu - u) (\mu - v) \left\{(\lambda - u) (\lambda - v) - (c^2 - \lambda) (a^2 - \lambda)\right\}$$
$$P^2 - P_3^2 = d^2 (\mu - u) (\mu - v) \left\{(\lambda - u) (\lambda - v) - (a^2 - \lambda) (b^2 - \lambda)\right\}$$

Die gefundenen Werthe von $P^2 + Q^2$, $P^2 - P_1^2$, $P^2 - P_2^2$, $P^2 - P_3^2$ denken wir uns nun in die Ausdrücke für $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ eingesetzt und erkennen, dass dadurch eine wesentliche Vereinfachung der Formeln herbeigeführt ist.

§ 5.

Wir haben jetzt die Aufgabe, die Grösse r zu bestimmen, d. h. die Entfernung zweier in dem Kummer'schen Sinne conjugirter Punkte der beiden confokalen Flächen zweiten Grades.

Dieser Ausdruck von r ist einerseits wichtig zur Bildung der Differentialgleichung

$$\left(\xi\frac{dx}{du}+\eta\frac{dy}{du}+\zeta\frac{dz}{du}\right)du+\left(\xi\frac{dx}{dv}+\eta\frac{dy}{dv}+\zeta\frac{dz}{dv}\right)dv=-d\varrho,$$

von deren Integration die Bestimmung der gesuchten Fläche abhängt, andererseits aber wird er dazu dienen, die bereits gefundenen Gleichungen des Strahlensystems noch weiter zu vereinfachen.

Wie bereits erwähnt, erhalten wir r^2 aus der Gleichung

$$r^2=(r\xi)^2+(r\eta)^2+(r\zeta)^2$$

Zunächst denken wir uns die gefundenen Werthe von P^2+Q^2, $P^2-P_1^2$, $P^2-P_2^2$, $P^2-P_3^2$ in die Ausdrücke für $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ eingesetzt. Alsdann tritt der gemeinschaftliche Faktor d^2 heraus und man erkennt, dass durch Division mit dem im Nenner befindlichen Faktor von P^2 die drei Ausdrücke für $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ sich auf den gemeinschaftlichen Nenner P^2 bringen lassen.

Bei dem ausserordentlichen Umfange, den unsre Formeln bei der jetzt anzustellenden Berechnung wenigstens im Anfange annehmen, obwohl sich aus diesen höchst verwickelten Formeln schliesslich ein sehr einfacher Ausdruck für r gegeben wird, müssen wir darauf verzichten, die Rechnung in extenso vorzuführen und werden uns einer abgekürzten Schreibweise bedienen.

Der Zähler in jedem der Ausdrücke $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ ist eine algebraische Summe von 2 Termen, von denen der erste wieder aus zwei Summanden besteht, da ja die Ausdrücke $P^2-P_1^2$, $P^2-P_2^2$, $P^2-P_3^2$ sich als algebraische Summen darstellen.

Wir können daher in unzweideutiger Weise $r\xi$, $r\eta$, $r\zeta$ folgendermassen abgekürzt schreiben

$$r\xi=\frac{(l_1-m_1)-n_1}{P^2}$$

$$r\eta=\frac{(l_2-m_2)-n_2}{P^2}$$

$$r\zeta=\frac{(l_3-m_3)-n_3}{P^2}$$

Die Bedeutung der Zeichen l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3 ist aus den entwickelten Formeln vollkommen evident, jedoch ist es zur Verfolgung der Rechnung unbedingt nothwendig, sich diese Bedeutung in jedem Augenblicke zu vergegenwärtigen.

Die passenden Vorzeichen denken wir uns mit den neu eingeführten Grössen vereinigt.

Durch Quadriren und Addiren erhalten wir nun

$$r^2=\frac{(l_1-m_1)^2+n_1^2+(l_2-m_2)^2+n_2^2+(l_3-m_3)^2+n_3^2}{P^4}-$$

$$2\,\frac{(l_1-m_1)\,n_1+(l_2-m_2)\,n_2+(l_3-m_3)\,n_3}{P^4}$$

Betrachten wir zunächst die Summe der doppelten Produkte. Aus denselben tritt als gemeinschaftlicher Faktor das Produkt U_1V_1 heraus, wenn wir zur Abkürzung setzen

$$U_1=\sqrt{(a^2-u)\,(b^2-u)\,(c^2-u)\,(\lambda-u)\,(\mu-u)}$$

$$V_1=\sqrt{(a^2-v)\,(b^2-v)\,(c^2-v)\,(\lambda-v)\,(\mu-v)}$$

Von dem noch übrigbleibenden Faktor von U_1V_1 erkennt man aber ohne die geringste Rechnung, dass er gleich $d^4(\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v)$ ist, sodass wir also den einen Theil von r^2 dargestellt haben in der Form

$$-2\,d^4\,\frac{U_1V_1(\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v)}{P^4}$$

Wir untersuchen jetzt, in welcher Weise sich die Summe der in r^2 vorkommenden Quadrate reduciren lässt. Zunächst enthalten dieselben alle den gemeinschaftlichen Faktor d^2. Unser Bestreben wird sich nun darauf richten müssen, noch einen zweiten Factor d^2 aus der angebenen Summe auszuscheiden, weil wir ja nothwendigerweise r^2 zu einem vollständigen Quadrate zusammensetzen müssen und der Ausdruck

$$2\,U_1V_1(\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v)$$

wohl das doppelte Produkt in dem zu bildenden Quadrate sein wird. Wir haben also folgende Summe zu untersuchen und auf die einfachste Gestalt zu bringen

$$(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) - 2(l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3) + (m_1^2 + m_2^2 + {}_3^2) + (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

Hierbei haben wir bereits durch die Schreibweise angedeutet, wie wir die einzelnen Ausdrücke zusammenfassen wollen.

Jede der 4 eingeklammerten Summen enthält, wie bereits bemerkt, den Faktor d^2, den wir ohne weiteres heraussetzen können. Sodann gelingt es aber, aus jeder dieser vier Summen den Faktor d^2 noch einmal herauszuziehen. Wie dies am zweckmässigsten ausgeführt wird, ist zur Genüge aus den bereits oben vorgekommenen, etwas ausführlicher besprochenen Fällen ersichtlich, wenn man noch die folgenden Relationen berücksichtigt

$$a^6(b^2 - c^2) + b^6(c^2 - a^2) + c^6(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2 + c^2)\,d^2$$
$$b^4c^4(b^2 - c^2) + c^4a^4(c^2 - a^2) + a^4b^4(a^2 - b^2) = (b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)\,d^2$$

Nebenbei lehrt die Ausführung der Rechnung, dass

$$l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

ist.

Wenn die angedeutete Operation ausgeführt ist, so erkennt man, dass aus jeder der vier oben genannten Summen nicht nur der Faktor d^4 sondern auch der Faktor

$$(\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v)$$

sich ausscheiden lässt. Bezeichnen wir für den Augenblick mit W^2 die Summe der vier Ausdrücke

$$(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2),\ -2(l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3),\ (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2),\ (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)$$

so kann man also nach dem Vorhergehenden W^2 auf die Form bringen

$$W^2 = d^4(\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v)\,T^2$$

Ordnet man sodann T^2 nach den symmetrischen Verbindungen

$$a^2b^2c^2,\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2,\ a^2 + b^2 + c^2$$

und nach den von a, b, c, freien Gliedern, so ergiebt sich nach einiger Rechnung

$$T^2 = (\lambda - u)(\mu - u)\left(a^2b^2c^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\,v + (a^2 + b^2 + c^2)\,v^2 - v^3\right)$$
$$+ (\lambda - v)(\mu - v)\left(a^2b^2c^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\,u + (a^2 + b^2 + c^2)\,u^2 - u^3\right)$$

oder

$$T^2 = (\lambda - u)(\mu - u)(a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v) + (\lambda - v)(\mu - v)(a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u)$$

Setzen wir diesen Ausdruck von T^2 in die Formel für W^2 ein und benutzen die bereits eingeführte Abkürzung

$$U_1^2 = (a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u)(\lambda - u)(\mu - u)$$
$$V_1^2 = (a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v)(\lambda - v)(\mu - v)$$

so geht W^2 über in

$$W^2 = d^4 \left(U_1^2 (\lambda - v)^2 (\mu - v)^2 + V_1^2 (\lambda - u)^2 (\mu - u)^2\right)$$

Diesen Ausdruck führen wir jetzt in die Formel für r^2 ein und erkennen, dass sich die einzelnen Theile von r^2 zu einem vollständigen Quadrate zusammengefügt haben. Wir erhalten nämlich

$$r^2 = d^4 \frac{U_1^2 (\lambda - v)^2 (\mu - v)^2 - 2 U_1 V_1 (\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v) + V_1^2 (\lambda - u)^2 (\mu - u)^2}{P^4}$$

folglich

$$r = d^2 \frac{U_1 (\lambda - v)(\mu - v) - V_1 (\lambda - u)(\mu - u)}{P^2}$$

Das Zeichen $\pm$, welches dem r eigentlich beizufügen ist, können wir weglassen, weil ja U_1 und V_1 bereits doppelte Vorzeichen haben. Wir können dabei festsetzen, dass r stets als positiv angesehen werde. Dann liefert unsre Formel zwei von einander verschiedene Werthe von r, welche entsprechend den Vorzeichen von U_1 und V_1 den beiden durch den Punkt x, y, z der Ausgangsfläche (λ) gehenden Strahlen des Systems angehören.

Die Entfernung r zweier conjugirter Punkte der beiden confokalen Flächen zweiten Grades ist nicht allein für das vorliegende Problem wichtig, sondern bietet auch an und für sich einiges Interesse. Wir wollen daher den gefundenen Ausdruck für r auf die einfachste Gestalt bringen, deren er fähig ist.

Wir knüpfen hierbei an den Ausdruck von P^2 an. Scheidet man aus P^2 den Faktor d^2 aus, so erhalten wir

$$\frac{1}{d^2} P^2 = \begin{array}{l} a^2b^2c^2 (u + v - \lambda - \mu) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(uv - \lambda\mu) + \\ (a^2 + b^2 + c^2)\left(uv(\lambda + \mu) - \lambda\mu(u + v)\right) + uv(uv - \lambda\mu) - (u + v)\left(uv(\lambda + \mu) - \lambda\mu(u + v)\right) \end{array}$$

Man erkennt leicht, dass dieser Ausdruck eine einfachere Gestalt annimmt, wenn man mit $u - v$ multiplicirt. Dann erhält man nämlich

$$\frac{u - v}{d^2} P^2 = \begin{array}{l} a^2b^2c^2\left((\lambda - u)(\mu - u) - (\lambda - v)(\mu - v)\right) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\left(v(\lambda - u)(\mu - u) - u(\lambda - v)(\mu - v)\right) \\ + (a^2 + b^2 + c^2)\left(v^2(\lambda - u)(\mu - u) - u^2(\lambda - v)(\mu - v)\right) - \left(v^3(\lambda - u)(\mu - u) - u^3(\lambda - v)(\mu - v)\right) \end{array}$$

Oder

$$\frac{u - v}{d^2} P^2 = \begin{array}{l} (a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v)(\lambda - u)(\mu - u) \\ - (a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u)(\lambda - v)(\mu - v) \end{array}$$

Führen wir nun die bleibende Bezeichnung ein

$$U = \sqrt{\frac{(a^2 - u)(b^2 - u)(c^2 - u)}{(\lambda - u)(\mu - u)}}, \qquad V = \sqrt{\frac{(a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v)}{(\lambda - v)(\mu - v)}}$$

so ist also

$$- P^2 = \frac{d^2}{u - v} (\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v)\left(U^2 - V^2\right)$$

Dass die eingeführten Ausdrücke U und V wenigstens für die hier in Betracht kommenden Fälle stets reelle Grössen darstellen, soll später nachgewiesen werden.

Setzen wir jetzt P^2 in den Ausdruck für r ein, so folgt

$$r = (u - v)\,\frac{U_1(\lambda - v)(\mu - v) - V_1(\lambda - u)(\mu - u)}{(\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v)(U^2 - V^2)}$$

Dividiren wir Zähler und Nenner mit $(\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v)$ so erhalten wir, da

$$U_1 = U(\lambda - u)(\mu - u) \text{ und}$$
$$V_1 = V(\lambda - v)(\mu - v) \text{ ist,}$$

für r d. h. für die Entfernung zweier conjugirter Punkte den höchst einfachen Ausdruck

$$r = \frac{u - v}{U + V}$$

§ 6.

Nachdem wir nun die Entfernung r zweier conjugirter Punkte der beiden confokalen Flächen zweiten Grades bestimmt haben, können wir ξ, η, ζ auf folgende Form bringen

$$\xi = \sqrt{a^2 - \lambda}\,\frac{(a^2 - u)(a^2 - v)(\mu - u)(\mu - v)\big((\lambda - u)(\lambda - v) - (b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)\big) - (a^2 - \mu)U_1V_1}{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}\,\sqrt{(a^2 - u)(a^2 - v)}\,\big(U_1(\lambda - v)(\mu - v) - V_1(\lambda - u)(\mu - u)\big)}$$

$$\eta = \sqrt{b^2 - \lambda}\,\frac{(b^2 - u)(b^2 - v)(\mu - u)(\mu - v)\big((\lambda - u)(\lambda - v) - (c^2 - \lambda)(a^2 - \lambda)\big) - (b^2 - \mu)U_1V_1}{\sqrt{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}\,\sqrt{(b^2 - u)(b^2 - v)}\,\big(U_1(\lambda - v)(\mu - v) - V_1(\lambda - u)(\mu - u)\big)}$$

$$\zeta = \sqrt{c^2 - \lambda}\,\frac{(c^2 - u)(c^2 - v)(\mu - u)(\mu - v)\big((\lambda - u)(\lambda - v) - (a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)\big) - (c^2 - \mu)U_1V_1}{\sqrt{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}\,\sqrt{(c^2 - u)(c^2 - v)}\,\big(U_1(\lambda - v)(\mu - v) - V_1(\lambda - u)(\mu - u)\big)}$$

Dividiren wir Zähler mit Nenner dieser Brüche mit $(\lambda - u)(\mu - u)(\lambda - v)(\mu - v)$ und führen zur Abkürzung ein

$$x = \sqrt{a^2 - \lambda}\,\sqrt{\frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}},\quad y = \sqrt{b^2 - \lambda}\,\sqrt{\frac{(b^2 - u)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)}}$$
$$z = \sqrt{c^2 - \lambda}\,\sqrt{\frac{(c^2 - u)(c^2 - v)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}}$$

so erhalten wir als schliessliche Ausdrücke für die Richtungscosinusse

$$\xi = x\,\frac{1 - \dfrac{(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)}{(\lambda - u)(\lambda - v)} - \dfrac{a^2 - \mu}{(a^2 - u)(a^2 - v)}UV}{U - V}$$

$$\eta = y\,\frac{1 - \dfrac{(c^2 - \lambda)(a^2 - \lambda)}{(\lambda - u)(\lambda - v)} - \dfrac{b^2 - \mu}{(b^2 - u)(b^2 - v)}UV}{U - V}$$

$$\zeta = z\,\frac{1 - \dfrac{(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)}{(\lambda - u)(\lambda - v)} - \dfrac{c^2 - \mu}{(c^2 - u)(c^2 - v)}UV}{U - V}$$

Mit Hülfe dieser Darstellung von ξ, η, ζ wollen wir nun die Differentialgleichung

$$\left(\xi\frac{dx}{du} + \eta\frac{dy}{du} + \zeta\frac{dz}{du}\right)du + \left(\xi\frac{dx}{dv} + \eta\frac{dy}{dv} + \zeta\frac{dz}{dv}\right)dv = -d\varrho$$

integriren.

Bilden wir zunächst den Ausdruck

$$\xi\frac{dx}{du} + \eta\frac{dy}{du} + \zeta\frac{dz}{du}.$$

Aus den Formeln, welche den Uebergang von den x, y, z zu den u, v vermitteln, ergiebt sich

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-\lambda}{(a^2-b^2)\,(a^2-c^2)}}\;\sqrt{\frac{a^2-v}{a^2-u}}$$
$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-\lambda}{(b^2-c^2)\,(b^2-a^2)}}\;\sqrt{\frac{b^2-v}{b^2-u}}$$
$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2-\lambda}{(c^2-a^2)\,(c^2-b^2)}}\;\sqrt{\frac{c^2-v}{c^2-u}}$$

Multipliciren wir diese Ausdrücke resp. mit ξ, η, ζ, addiren und bringen alles auf den gemeinschaftlichen Nenner $2\,d^2\,(U-V)$, so finden wir, dass der Ausdruck

$$\xi\frac{dx}{du} + \eta\frac{dy}{du} + \zeta\frac{dz}{du}$$

sich darstellt in der Form

$$\frac{1}{2\,d^2\,(U-V)}\left\{\begin{array}{l}(a^2-\lambda)\,(a^2-v)\,(b^2-c^2)\left(1-\dfrac{(b^2-\lambda)\,(c^2-\lambda)}{(\lambda-u)\,(\lambda-v)}-\dfrac{a^2-\mu}{(a^2-u)\,(a^2-v)}UV\right)+\\ (b^2-\lambda)\,(b^2-v)\,(c^2-a^2)\left(1-\dfrac{(c^2-\lambda)\,(a^2-\lambda)}{(\lambda-u)\,(\lambda-v)}-\dfrac{b^2-\mu}{(b^2-u)\,(b^2-v)}UV\right)+\\ (c^2-\lambda)\,(c^2-v)\,(a^2-b^2)\left(1-\dfrac{(a^2-\lambda)\,(b^2-\lambda)}{(\lambda-u)\,(\lambda-v)}-\dfrac{c^2-\mu}{(c^2-u)\,(c^2-v)}UV\right)\end{array}\right\}$$

Wir reduciren nun den in der grossen Klammer befindlichen Ausdruck, indem wir jedesmal die in einer und derselben Vertikalreihe stehenden Grössen zusammenfassen.

Die erste Vertikalreihe liefert d^2, die Summe der in der zweiten Vertikalreihe stehenden Grössen verschwindet und die letzte Vertikalreihe endlich liefert den Ausdruck

$$-\frac{UV}{(a^2-u)\,(b^2-u)\,(c^2-u)}\left\{\begin{array}{l}(b^2-c^2)\,(a^2-\lambda)\,(a^2-\mu)\,(b^2-u)\,(c^2-u)+\\ (c^2-a^2)\,(b^2-\lambda)\,(b^2-\mu)\,(c^2-u)\,(a^2-u)+\\ (a^2-b^2)\,(c^2-\lambda)\,(c^2-\mu)\,(a^2-u)\,(b^2-u)\end{array}\right\}$$

Ohne Schwierigkeit findet man, dass der in der geschlungenen Klammer stehende Ausdruck gleich ist

$$d^2\,(\lambda-u)\,(\mu-u),$$ sodass also

die letzte Vertikalreihe als Beitrag liefert

$$-d^2\,UV\,\frac{1}{U^2} = -d^2\,\frac{V}{U}$$

Demnach ist

$$\xi\frac{dx}{du} + \eta\frac{dy}{du} + \zeta\frac{dz}{du} = \frac{1}{2\,d^2\,(U-V)}\left(d^2 - d^2\,\frac{V}{U}\right) = \frac{1}{2\,U}$$

In derselben Weise findet man

$$\xi\frac{dx}{dv} + \eta\frac{dy}{dv} + \zeta\frac{dz}{dv} = \frac{1}{2\,V}$$

Durch die Einführung der elliptischen Coordinaten ist es also in der That gelungen, die Variabeln in der anscheinend so ausserordentlich complicirten Differentialgleichung

$$\left(\xi\frac{dx}{du} + \eta\frac{dy}{du} + \zeta\frac{dz}{du}\right)du + \left(\xi\frac{dx}{dv} + \eta\frac{dy}{dv} + \zeta\frac{dz}{dv}\right)dv = -d\varrho$$

zu trennen, denn dieselbe nimmt jetzt die einfache Gestalt an

$$-d\varrho = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{U} + \frac{dv}{V}\right)$$

Bezeichnen wir mit $F(u)$ und $F(v)$ resp. die unbestimmten Integrale

$$\int \frac{du}{U} \text{ und } \int \frac{dv}{V}, \text{ so erhalten wir}$$

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(F(u) + F(v)\big) + \text{Const.}$$

Die vorgelegte Differentialgleichung ist demnach mit Hülfe der einfachsten hyperelliptischen Integrale gelöst, derselben, auf welche die Integration der geodätischen Linien des dreiachsigen Ellipsoides geführt hat.

Die in der Gleichung für ϱ vorkommende willkürliche Constante deutet an, dass das Problem nicht auf eine einzige Fläche führt, sondern auf eine einfach unendliche Schaar von Flächen. In der That kann man ja von jeder Fläche unsres Problems zu einer andern Fläche derselben Art gelangen, indem man auf allen Normalen von den Fusspunkten aus eine constante Länge abträgt. Die Gesammtheit aller dieser Parallelflächen ist es, auf welche unser Problem uns geführt hat.

Alle Flächen dieser Schaar sind dargestellt durch die Gleichungen

$$x' = x + \varrho\xi,\ y' = y + \varrho\eta,\ z' = z + \varrho\zeta;$$

$x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ und ϱ sind jetzt bekannte Funktionen der beiden Parameter u und v.

§ 7.

Wir wollen nun den noch rückständigen Beweis liefern, dass die eingeführten Ausdrücke U und V wenigstens in den hier in Betracht kommenden Fällen stets reelle Grössen darstellen. Da die beiden confokalen Flächen zweiten Grades, welche unsre Aufgabe voraussetzt, nicht von derselben Art sein dürfen, sondern nothwendigerweise reelle Durchdringungen haben müssen, so sind nur die drei folgenden Fälle zu unterscheiden:

Die beiden confokalen Flächen zweiten Grades sind entweder ein Ellipsoid und ein einschaliges Hyperboloid, oder ein Ellipsoid und ein zweischaliges Hyperboloid oder endlich ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid.

Es genügt, wenn wir für einen der genannten Fälle den Beweis der Realität der Ausdrücke U und V liefern. Wir wollen annehmen, es sei ein Ellipsoid und ein zweischaliges Hyperboloid gegeben. Da die Ausdrücke U und V in Bezug auf λ und μ symmetrisch sind, so können wir unbeschadet der Allgemeingültigkeit unseres Beweises annehmen, das Ellipsoid sei die Fläche (λ), das Hyperboloid die Fläche (μ); ausserdem setzen wir fest, dass $a \succ b \succ c$ sei. Ein beliebiger Punkt des Ellipsoides ist durch die elliptischen Coordinaten u und v gegeben, d. h. er wird bestimmt als Schnitt des Ellipsoides mit einem einschaligen und einem zweischaligen Hyperboloide, welche beide zu dem Ellipsoide confokal sind. Sei $u =$ const. die Schaar der einschaligen, $v =$ const. die Schaar der zweischaligen Hyperboloide. Eine Vertauschung dieser Bezeichnungen würde den Beweis nicht alteriren.

Es ist jetzt

$$\lambda \prec c^2 \text{ und } b^2 \prec \mu \prec a^2 \text{ ferner}$$
$$c^2 \prec \mu \prec b^2$$
$$b^2 \prec v \prec a^2$$

Aber man erkennt leicht, dass, obwohl v und μ sich in demselben Intervalle befinden, doch v stets grösser als μ sein muss. In der That, bei unsrer Aufgabe können ja nur solche Punkte des

Ellipsoides (λ) in Betracht kommen, welche ausserhalb des von dem zweischaligen Hyperboloide (μ) eingeschlossenen Raumes liegen, weil nur diese Punkte gemeinschaftliche Tangenten der beiden confokalen Flächen zweiten Grades liefern können. Es können also dem v nur solche Werthe beigelegt werden, für welche das zugehörige zweischalige Hyperboloid die Fläche (μ) einschliesst. Dies erfordert aber, dass v stets grösser als μ sei.

Es ist also jetzt

$$\begin{array}{ll} a^2 - u > 0 & a^2 - v > 0 \\ b^2 - u > 0 & b^2 - v < 0 \\ c^2 - u < 0 & c^2 - v < 0 \\ \lambda - u < 0 & \lambda - v < 0 \\ \mu - u > 0 & \mu - v < 0 \end{array}$$

d. h. U und V sind reelle Grössen. In genau derselben Weise kann man die Realität dieser Ausdrücke in den beiden andern Fällen nachweisen, was wir hier übergehen.

§ 8.

Die wichtigste Eigenschaft der gefundenen Flächen besteht in ihrem Zusammenhange mit den geodätischen Linien der Flächen zweiten Grades.

Denkt man sich nämlich auf einer beliebigen krummen Oberfläche die sämmtlichen Krümmungslinien construirt, so gehört bekanntlich zu jeder Krümmungslinie eine abwickelbare Fläche, gebildet von den sämmtlichen Normalen der ursprünglichen Fläche längs der betreffenden Krümmungslinie. Da es zwei Arten von Krümmungslinien auf der Fläche giebt, so hat man auch zwei Arten solcher abwickelbaren Flächen zu unterscheiden. Der Ort der Rückkehrkurven aller dieser abwickelbaren Flächen ist die Centrenfläche und zwar wird die eine Schale derselben von den Rückkehrkurven der einen Art, die andre Schale von den Rückkehrkurven der andern Art gebildet. Diese Rückkehrkurven sind nun geodätische Linien der von ihnen erzeugten Schalen.

Wenden wir diese Resultate auf unsre Flächen an, so gewinnen wir also folgende wichtige Eigenschaft derselben:

Fassen wir die abwickelbaren Flächen ins Auge, welche zu den Krümmungslinien der einen Art gehören, so ist der Ort der Rückkehrkurven aller dieser abwickelbaren Flächen eine Fläche zweiten Grades und jene Rückkehrkurven sind geodätische Linien derselben. Ebenso gehört zu den Krümmungslinien der andern Art eine solche Fläche zweiten Grades und beide Flächen zweiten Grades sind confokal.

So complicirt auch die Gleichungen unsrer Fläche sind, die Differentialgleichungen ihrer Krümmungslinien gestalten sich ausserordentlich einfach. Man hat nämlich nur die Differentialgleichungen der geodätischen Linien der beiden confokalen Flächen (λ) und (μ) aufzustellen, diese stellen dann zu gleicher Zeit die beiden Schaaren der Krümmungslinien der neuen Fläche dar.

Die Beziehungen der geodätischen Linien der Flächen zweiten Grades zu den Krümmungslinien der von uns gefundenen Fläche sind auch bereits in den Resultaten unsrer Rechnung enthalten. Da nämlich eine geodätische Linie einer der beiden confokalen Flächen zweiten Grades gewissermassen als Evolute der zugehörigen Krümmungslinie der transcendenten Fläche aufgefasst werden kann und diese Krümmungslinie sich durch Abwickelung eines längs einer geodätischen Linie der Centrenfläche gespannten Fadens erzeugen lässt, so muss die Grösse, welche wir mit ϱ

bezeichnet haben, d. h. die auf der Tangente einer geodätischen Linie der Centrenfläche gemessene Entfernung von ihrem Berührungspunkte bis zu ihrem Durchstosspunkte mit der neuen Fläche, abgesehen von einer von u und v unabhängigen Constanten, gleich sein einem bestimmten Bogen der geodätischen Linie, nämlich dem Stücke derselben von dem Berührungspunkte jener Tangente bis zu einem festen Anfangspunkte.

Sehen wir von dieser additiven, von u und v unabhängigen Constanten ab, so ist nach unsrer Rechnung

$$\varrho = \frac{1}{2}\left\{\int \frac{du}{U} + \int \frac{dv}{V}\right\}$$

Dies ist aber in der That genau die Formel, welche Jacobi in seinen Vorlesungen über Dynamik (28. Vorlesung, pag, 214) hergeleitet hat. Wir haben also in unsrer Rechnung zugleich eine neue Herleitung des Bogens einer geodätischen Linie einer Fläche zweiten Grades gewonnen. Die Bestimmung der geodätischen Linien der Flächen zweiten Grades ist zwar ursprünglich von einer Differentialgleichung zweiter Ordnung abhängig und die schliesslichen Integrale müssen daher zwei willkürliche Constanten enthalten, bei dem Wege aber, den unser Problem vorschrieb, genügte die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung. Die zweite willkürliche Constante, welche in dem Ausdrucke für den Bogen enthalten sein muss, ist nichts anderes als die Grösse μ, welche die zu der ersten Fläche zweiten Grades confokale Fläche bestimmt. In der That wird ja durch die Wahl einer zur ersten Fläche confokalen Fläche aus der zweifach unendlichen Mannigfaltigkeit von geodätischen Linien einer jeden der beiden Flächen eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit ausgeschieden, indem durch jeden Punkt der beiden confokalen Flächen nur zwei geodätische Linien gehen, welche in dem durch die beiden Flächen (λ) und (μ) definirten Strahlensysteme überhaupt in Betracht kommen. Eine Variation von μ würde alle geodätischen Linien der Fläche (λ) bestimmen und umgekehrt erhielte man durch Variation von λ alle geodätischen Linien der Fläche (μ), Auf diese Weise erkennt man, warum wir bei unserm Probleme mit der Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung ausreichten, die specielle Anordnung der Aufgabe leistet eine Integration gewissermassen von selbst. Es ergiebt sich hierbei zugleich eine geometrische Deutung der einen willkürlichen Integrationsconstanten, derjenigen, welche Jacobi am angegebenen Orte mit β bezeichnet hat. Nach einem Satze von Chasles nämlich berühren alle Tangenten längs einer geodätischen Linie einer Fläche zweiten Grades eine zur ersten confokale Fläche, so dass auf diese Weise einer jeden geodätischen Linie eine bestimmte confokale Fläche zugeordnet ist. Die Integrationsconstante β hat nun die geometrische Bedeutung, dass die zur Fläche (λ) confokale Fläche (β) gerade diejenige ist, welche der durch den Werth β ausgezeichneten geodätischen Linie der Fläche (λ) entspricht. Hierdurch ist auch zugleich die Bedingung erfüllt, welche Jacobi für β aufstellte. Es muss nämlich β oder nach unsrer Schreibweise μ zwischen u und v liegen und diesen Nachweis haben wir oben bereits geführt.

Es mag noch hervorgehoben werden, dass die gefundenen Flächen Linien sphärischer Krümmung enthalten, welche den Durchdringungscurven der beiden confokalen Flächen zweiten Grades entsprechen.

§ 9.

Unsre Aufgabe hat uns zu einer ganzen Classe von neuen Flächen geführt. Die allgemeinsten, deren Centrenflächen sich aus 2 allgemeinen confokalen Flächen zweiten Grades zu-

sammensetzen, werden durch die einfachsten hyperelliptischen Integrale ausgedrückt. Wir können nun in mannigfacher Weise specialisiren, wodurch auch die auftretenden Transcendenten einfacherer Natur werden. Wählt man die beiden confokalen Flächen als Rotationsflächen, so wird man zu Flächen gelangen, welche durch elliptische Integrale darstellbar sind, eine weitere Specialisirung führt zu der schon erwähnten Monge'schen Fläche, welche durch trigonometrische Funktionen darstellbar ist. Endlich gehört als Grenzfall zu unsern Flächen noch eine Classe algebraischer Flächen, nämlich die Dupin'schen Cykliden, deren Centrenfläche aus den beiden Fokalkegelschnitten eines Systemes confokaler Flächen zweiten Grades besteht.

Wir wollen hier nur noch einen Specialfall hervorheben, welcher nicht ganz ohne Interesse ist. Wir nehmen an, dass die eine der beiden confokalen Flächen zweiten Grades in einen Fokalkegelschnitt degenerire, und zwar wollen wir, um die Vorstellungen zu fixiren, voraussetzen, es sei ein Ellipsoid und die dazu gehörige Fokalhyperbel gegeben.

Die Gleichungen der beiden Schalen der gegebenen Centrenfläche können wir dann in die Form bringen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1$$

Dieser Specialfall kann in genau derselben Weise durchgeführt werden, wie der allgemeine, indem man wieder das Ellipsoid als Ausgangsfläche benutzt und elliptische Coordinaten zu Grunde legt. Nur gestaltet sich die Rechnung bei weitem einfacher als in dem von uns durchgeführten allgemeinen Falle. Die Resultate, zu welchen dieser Specialfall führt, können wir aber auch ohne alle Rechnung aus dem allgemeinen Falle ableiten, indem wir einfach $\lambda = o$ und $\mu = b^2$ setzen. In der That verwandeln sich durch diese Annahmen die beiden confokalen Flächen zweiten Grades in ein Ellipsoid und die dazu gehörige Fokalhyperbel.

Setzen wir für diesen Fall

$$U = \sqrt{\frac{(a^2 - u)\,(c^2 - u)}{-u}},\quad V = \sqrt{\frac{(a^2 - v)\,(c^2 - v)}{-v}},$$

so erhalten wir im Anschluss an die frühere Bezeichnung

$$r = \frac{u - v}{U + V}$$

$$\xi = x\,\frac{1 - \dfrac{b^2c^2}{uv} - \dfrac{a^2 - b^2}{(a^2 - u)\,(a^2 - v)}\,UV}{U - V}$$

$$\eta = y\,\frac{1 - \dfrac{c^2a^2}{uv}}{U - V}$$

$$\zeta = z\,\frac{1 - \dfrac{a^2b^2}{uv} - \dfrac{c^2 - b^2}{(c^2 - u)\,(c^2 - v)}\,UV}{U - V}$$

$$\varrho = \frac{1}{2}\big(F(u) + F(v)\big) + \text{Const.},$$

wenn wir mit $F(u)$ und $F(v)$ die elliptischen Integrale $\int \frac{du}{U}$ und $\int \frac{dv}{V}$ bezeichnen.

Die Gleichungen der Fläche, deren Centrenfläche sich aus einem Ellipsoide und der zugehörigen Fokalhyperbel zusammensetzt, lautet alsdann

$$x' = x + \varrho\xi,\ y' = y + \varrho\eta,\ z' = z + \varrho\zeta.$$

Dieses specielle Problem führt also nur auf elliptische Integrale. Da nämlich die Fokalhyperbel durch die reellen Kreispunkte des Ellipsoides geht, so kommen bei diesem Probleme nur diejenigen geodätischen Linien des Ellipsoides in Betracht, welche durch die Kreispunkte gehen und diese sind durch elliptische Integrale ausdrückbar.

Die Flächen, zu denen man gelangt, sind Kanalflächen und können erzeugt werden durch eine Kugel, welche sich so bewegt, dass ihr Mittelpunkt stets auf der Fokalhyperbel bleibt, während ihr Radius nach einem bestimmten Gesetze sich ändert. Die eine Schaar der Krümmungslinien dieser Flächen besteht aus Kreisen, die andre Schaar aus Curven von der Beschaffenheit, dass die längs derselben construirten Normalen der Fläche abwickelbare Flächen bilden, deren Rückkehrkurven diejenigen geodätischen Linien des Ellipsoides sind, welche durch die Kreispunkte gehen.

THESEN.

I.

In den mathematischen Unterricht der Gymnasien und Realschulen sind neben der Euklidischen Geometrie auch die Elemente der projectivischen Geometrie aufzunehmen. An geeigneter Stelle, insbesondere bei den Congruenz- und Aehnlichkeitssätzen, ist der Zusammenhang beider Disciplinen nachzuweisen. Die aus der Euklidischen Geometrie entlehnten Constructionsaufgaben in der üblichen Ausdehnung zu behandeln, ist unzweckmässig. Dagegen sind in den Lehrplan der Prima die Elemente der analytischen Geometrie sowie der Differential- und Integralrechnung aufzunehmen. In den genannten Beziehungen sind die Vorschläge von Fiedler, Gallenkamp und Unverzagt zu beachten.

II.

Der Werth einer mathematischen Disciplin kann nicht nach ihrer Anwendbarkeit auf empirische Wissenschaften bemessen werden.

III.

Aus dem von Hobbes und Spinoza aufgestellen Principe der Selbsterhaltung lassen sich die Gesetze der Moral mit grösserer Sicherheit und Nothwendigkeit construiren als aus irgend einem andern Principe.

LEBENSLAUF.

Ich, Ferdinand Rudio, bin geboren am 2. August 1856 zu Wiesbaden, wo mein Vater, Heinrich Rudio, Revisionsrath a. D., noch jetzt lebt. Meine Mutter, Luise Rudio, geb. Klein, wurde mir am 20. Januar 1879 durch den Tod entrissen.

Nach genossenem Elementarunterrichte besuchte ich 4 Jahre lang das Gymnasium meiner Vaterstadt. Meine Neigung zu Mathematik und Naturwissenschaften veranlasste mich indessen Ostern 1870 in das ebendaselbst befindliche Realgymnasium überzutreten. Ich hatte dort das Glück, von den Herren Fürstenau und Unverzagt in die höhere Mathematik eingeführt zu werden. Die Anregungen, die ich ihrem Unterrichte verdanke, reichen weit über meine Gymnasialzeit hinaus; ich benütze daher gerne die Gelegenheit, den beiden verehrten Lehrern meinen herzlichsten Dank auszusprechen für die Grundlage, die sie meinen Studien gegeben haben.

Ostern 1874 erhielt ich das Zeugniss der Reife und trat sodann nach bestandenem Aufnahmeexamen in die Ingenieurschule des Polytechnikums zu Zürich ein. Nachdem ich in 3 Semestern die beiden ersten Jahreskurse der Ingenieurschule absolvirt hatte, trat ich Herbst 1875 in die von Professor Fiedler geleitete Abtheilung für Mathematik und Naturwissenschaften des Polytechnikums über.

Leider sollten meine Studien bald in der empfindlichsten Weise unterbrochen werden. Im Frühjahr 1876 erkrankte ich am Typhus und zwar so heftig, dass ich nicht allein das ganze Sommersemester krank darniederlag, sondern auch das folgende Wintersemester ausschliesslich der Wiederherstellung meiner Gesundheit widmen musste. Nachdem ich den Winter in Wiesbaden, das Frühjahr in Italien zugebracht hatte (zum ersten Male war ich Herbst 1875 in Italien gewesen), nahm ich im Sommersemester 1877 meine Studien in Zürich wieder auf. Am Züricher Polytechnikum habe ich die Vorlesungen der Herren Professoren Culmann, Fiedler, Geiser, Heim, Kinkel, Scherr, H. A. Schwarz und F. Weber gehört. Im Herbste 1877 wurde ich an der hiesigen Universität immatrikulirt und hörte 5 Semester lang die Vorlesungen der Herren Professoren Borchardt, Kirchhoff, Kronecker, Kummer, Paulsen, Weierstrass. Im Herbste 1878 hielt ich mich Studien halber 2 Monate in Paris auf. Dem hiesigen mathematischen Seminare gehöre ich seit Ostern 1878 an.

Ich erlaube mir an dieser Stelle, allen meinen verehrten Lehrern für mannigfache Anregungen und wohlwollende Förderung meiner Studien meinen vorzüglichsten Dank auszusprechen.